1. Resolver $2xyy' \cos^2(y/x) = 2y^2 \cos^2(y/x) + xy \operatorname{sen}^2(y/x)$

Solución:

2. Halle la solución del problema $y' = (x+y+1)/(x+y), \quad y(1) = 0.$

Solución: Esta ecuación se puede transformar en una ecuación diferencial en variables separables, con ayuda de sustitución:

$$\begin{aligned} z &= x+y \\ \frac{dz}{dx} &= 1 + \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

la ecuación dada se convierte en: $\dfrac{dz}{dx} - 1 = \dfrac{z+1}{z}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z+1}{z}$

separando las variables: $\dfrac{zdz}{2z+1} = dx$,

integrando obtenemos: $\dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{4}\ln|2z+1| = x + c$

volviendo a variable originales $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{1}{4}\ln|2x+2y+1| = x + c$

buscando la solución que satisface a la condición dada $y(1) = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 3 &= 1 + c \\ \Rightarrow c &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 3 \end{aligned}$$

y la solución buscada es:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} - \frac{1}{4}\ln|2x+2y+1| &= x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 3 \\ x+y - \frac{1}{2}\ln|2x+2y+1| &= 2x - 1 - \frac{1}{2}\ln 3 \\ y - x - \frac{1}{2}\ln|2x+2y+1| &= -1 - \frac{1}{2}\ln 3 \\ x - y + \frac{1}{2}\ln|2x+2y+1| &= 1 + \frac{1}{2}\ln 3, \end{aligned}$$

siempre que $2x + 2y + 1 \neq 0.$

3.

a) Sea $n > 1$. Demuuestre que si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en un intervalo J que contiene a x_0, entonces para cada y_0 real, el problema

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, y(x_0) = y_0$$

tiene única solución $y = \varphi(x_0)$ definida para todo x de un intervalo (a, b) contenido en J y que contiene a x_0.

b) Si $0 < n < 1$, (a) es falso. Compruébelo considerando el problema $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$

Solución:

4. Halle una solución explícita del problema

$$\begin{cases} y' - y(xy^2 - 3) & = 0 \\ y(\frac{19}{6}) & = 1, \end{cases}$$

indicando el intervalo de definición de la misma.

Solución:

5. Sea γ una curva en el primer cuadrante para la cual la distancia desde un punto cualquiera P de la misma al origen es igual a la longitud del segmento de tangente a la curva en P, cuyos extremos son P y su intersección con el eje x. Sabiendo que γ pasa por el punto $(3, 1)$, halle su ecuación.

Solución:

6. a) Halle para que $y = \alpha \operatorname{sen} x$ sea solución de

$$y' = (2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^2)/2\cos x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$$

b) Halle las soluciones en forma explícita de la ecuación dada en a).

Solución:

7. Resolver el problema

$$\begin{cases} y'' y^3 & = & 1 \\ y(\frac{1}{2}) & = & 1 \\ y'(\frac{1}{2}) & = & 1 \end{cases}$$

Solución:

8. a) Explique por que se puede aplicar el método de Picard para resolver el problema

$$\begin{cases} y' & = & 2x(1+y) \\ y(0) & = & 0 \end{cases}.$$

b) Resuelva el problema de la parte a) aplicando el método de Picard.

Solución:

9. La masa de un material radioactivo se expresa, como función del tiempo, mediante la función $y(t.)$ Supongamos que se conoce la masa y_0, al cabo de un tiempo $t_0, y_0 = y(t_0)$. Se sabe que la función $y(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

donde k es una constante positiva; se sabe también que existe un tiempo T tal que

$$y(t_0 + T) = \frac{1}{2} y(t_0) = \frac{1}{2} y_0.$$

Encuentre el valor de k.

Solución: Vamos a integrar la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -ky$,
con condición inicial $y(t_0) = y_0$

$$\begin{aligned} \text{Tenemos} \quad \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dy}{y} &= -\int_{t_0}^{t} k dt \\ \ln y(t) - \ln y(t_0) &= -k(t - t_0) \\ y(t) &= y(t_0) e^{-k(t-t_0)} \qquad (1) \end{aligned}$$

(1) es la ley de cambio de la masa de un material radioactivo. Para hallar la constante k, utilizamos la condición $y(t_0 + T) = \frac{1}{2} y(t_0) = \frac{1}{2} y_0$.

Sustituimos en la ecuación (1) $t = t_0 + T$, tenemos $y(t_0 + T) = y(t_0) e^{-k(t_0+T-t_0)} = \frac{1}{2} y(t_0)$

entonces, $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, $-kT = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T}$. Esto es el valor de k que buscamos.